УДК 621.791.052
© 2008

Розрахунок коефіцієнта інтенсивних напружень для кутової тріщини у швелерному профілі за дії стисненого кручення

М.І. Підгурський, М.Я. Сташків, кандидати технічних наук
Тернопільський державний технічний університет ім. І. Пулюя

Розглянуто особливості розвитку кутової тріщини в тонкостінних профільних елементах і визначено коефіцієнт інтенсивності напружень у вершинах віток наскрізної кутової тріщини у швелері. Отримано поправкові залежності цього коефіцієнта для стандартного сортаменту швелерів.

Основними елементами несучих систем мобільних машин є, як правило, тонкостінні профілі. За формою перетину тонкостінні профілі поділяються на відкриті (кутник, швелер, двотавр та ін.) і замкнені (труби з різними формами поперечного перетину). Розрахунок тонкостінних профілів має ряд особливостей, в першу чергу при крученні. Як відомо, кручення тонкостінних відкритих профілів пов’язано із спотворенням площини поперечного перетину – депланацією. За постійної величини крутного моменту на всій довжині бруса, який скручується, і вільних його кінцях, усі поперечні перетини депланують однаково. Така депланація не пов’язана з появою нормальних напружень у перетині. Якщо ж поздовжнє змішення точок бруса обмежене, внаслідок того, що торці його защемлені або крутний момент непостійний по довжині бруса, то депланація поперечних перетинів різна, що викликає поздовжні деформації, і відповідно нормальні напруження в поперечних перетинах бруса. Такий випадок кручення при обмеженні поздовжніх переміщень називають стисненим крученням.

Для оцінки напруженого стану конструкцій за стисненого кручення їх елементів (у перетинах виникають нормальні напруження) і наявності втомних тріщин основним розрахунковим параметром є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) нормального відриву K_I.

Незважаючи на актуальність проблеми, у сучасній літературі дуже рідко зустрічаються задачі з визначення КІН нормального відриву K_I з урахуванням напружень стисненого кручення. Зокрема, запропонована методика визначення КІН для тріщини, що розвивається з краю полиці швелера (рис. 1, *а*) [1].

Експериментальні випробування напівнатурних зразків, коли діють бімоменти, підтвердили правомірність застосування запропонованого підходу до розрахунку КІН для тріщини, що поширюється у полиці швелера.

Розглянемо задачу розвитку наскрізної тріщини з кута швелера (рис. 1, *б*) за дії стисненого кручення. Ця задача є також частковим випадком розвитку тріщини у профілі двотаврового поперечного перетину або несиметричного двотаврового профілю (рис. 1, *в*).

Як відомо [2], у разі навантаження тонкостінного стержня згинально-

крутним бімоментом нормальні напруження змінюються за законом секторіальних площ і описуються залежностями:

$$\sigma_\omega = B_\omega \cdot \omega / I_\omega , \qquad (1)$$

де B_ω – згинально-крутний бімомент, Н · м^2;

I_ω – секторіальний момент інерції перетину, м^6;

ω – секторіальна координата точки при розміщенні полюса в центрі згину, а початкової точки (початок відліку) – в головній секторіальній точці, м^2.

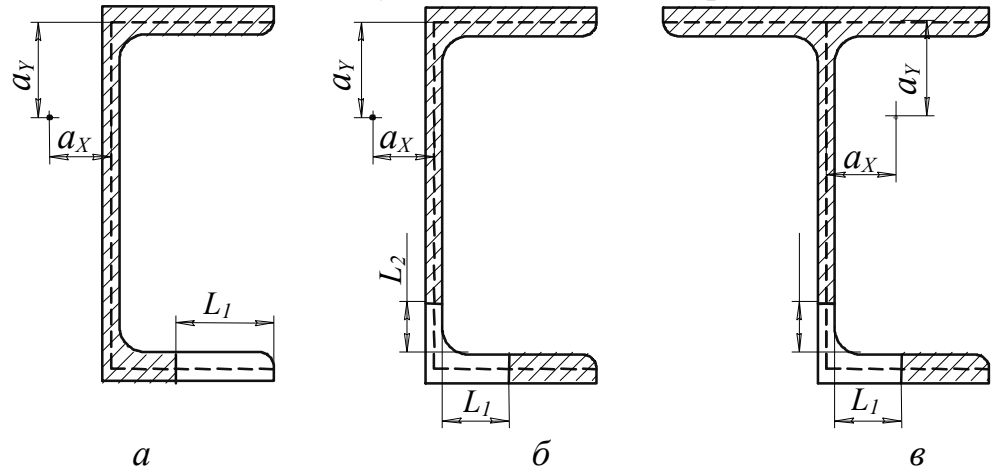

Рис. 1. Схеми розвитку тріщин

Визначення напружено-деформованого стану в нетто-перетині тонкостінного профілю базується на визначенні секторіальних геометричних характеристик цього перетину. Задачу розв'язуємо методом інтегрування довільних епюр [3], який дозволяє визначити координати центра згину α_X і α_Y та секторіальний момент інерції I_ω поперечного перетину довільного тонкостінного профілю незалежно від того, відомі чи невідомі центр мас та головні екваторіальні моменти інерції цього профілю.

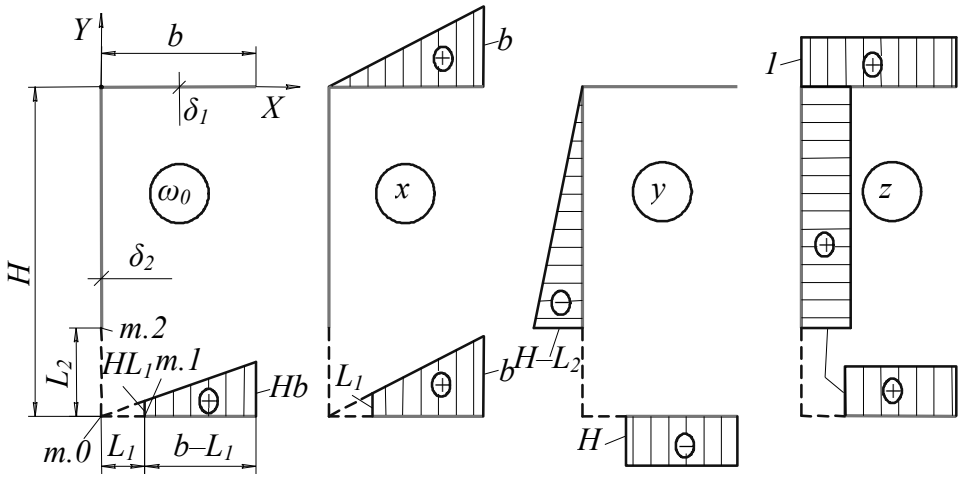

Рис. 2. Епюри секторіальних характеристик поперечного перетину швелера з кутовою тріщиною

Для цього будуємо довільні епюри лінійних x, y, z та секторіальних ω координат даного перетину (рис. 2). Будуючи епюру X, за нульову лінію вибираємо вісь горизонтальної стінки профілю і додатній напрямок

відраховуємо вправо; епюру Y – вісь вертикальної стінки профілю і додатній напрямок – угору. Епюру Z приймаємо з постійними, рівними одиниці, координатами для всіх точок перетину. Епюру початкових секторіальних площ ω_0 будуємо з довільним полюсом у точці перетину осей сторін контуру. Побудову епюр секторіальних та лінійних координат тонкостінного профілю проводимо по його середній лінії.

Епюра головних секторіальних координат профілю ω, яка визначає закон розподілу нормальних напружень σ_ω при стисненому крученні, ортогональна з епюрами його лінійних координат x і y (визначають розподіл нормальних напружень при згині) і з рівномірною епюрою z (відповідає закону розподілу нормальних напружень за рівномірного розтягу).

Епюра головних секторіальних координат профілю описується рівнянням [2]

$$\omega = \alpha_Y \cdot x - \alpha_X \cdot y + \beta \cdot z + \omega_0 \tag{2}$$

і повинна задовольняти умовам системи:

$$\begin{cases} \alpha_Y \cdot \int\limits_F x^2 dF - \alpha_X \cdot \int\limits_F yxdF + \beta \cdot \int\limits_F zxdF + \int\limits_F \omega_0 xdF = 0 \\ \alpha_Y \cdot \int\limits_F xydF - \alpha_X \cdot \int\limits_F y^2 dF + \beta \cdot \int\limits_F zydF + \int\limits_F \omega_0 ydF = 0 \\ \alpha_Y \cdot \int\limits_F xzdF - \alpha_X \cdot \int\limits_F yzdF + \beta \cdot \int\limits_F z^2 dF + \int\limits_F \omega_0 zdF = 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Визначимо інтеграли по всій площі перетину від квадратів цих епюр та їх добутків, узятих попарно. Отримаємо:

$$\begin{aligned} &\int x^2 dF = \frac{1}{6} b^3 \delta_1 \left(1 + \left(1 - \frac{L_1}{b} \right) \right); && \int y^2 dF = \frac{1}{6} H^2 (6(b - L_1)\delta_1 + H\delta_2); \\ &\int z^2 dF = (2b - L_1)\delta_1 + H\delta_2; && \int xydF = -\frac{1}{2} H (b - L_1)^2 \delta_1;; \\ &\int xzdF = \frac{1}{2}(2b^2 - 2bL_1 + L_1^2)\delta_1; && \int yzdF = -\frac{1}{2} H (2(b - L_1)\delta_1 + H\delta_2); \\ &\int x\omega_0 dF = \frac{1}{6} H (b - L_1)^3 \delta_1; && \int y\omega_0 dF = -\frac{1}{2} H^2 (b - L_1)^2 \delta_1; \\ &\int z\omega_0 dF = \frac{1}{2} H (b - L_1)^2 \delta_1; && \int \omega_0^2 dF = \frac{1}{6} H^2 (b - L_1)^3 \delta_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Розв’язавши систему рівнянь (3), з урахуванням залежностей (4) отримаємо рівняння для визначення секторіальних координат α_X, α_Y, β центра згину поперечного нетто-перетину швелерного профілю, ослабленого наскрізною кутовою тріщиною. Зазначимо, що при $L_1 = 0$ (тріщина відсутня) із цих залежностей отримаємо

$$\alpha_Y = -\frac{1}{2} H ,$$

що співпадає з горизонтальною віссю симетрії бездефектного швелера.

Секторіальний момент інерції поперечного перетину визначають за формулою

$$I_\omega = \alpha_Y \int_F x\omega_0 dF - \alpha_X \int_F y\omega_0 dF + \beta \int_F z\omega_0 dF + \int_F \omega_0^2 dF. \quad (5)$$

Підставляючи рівняння (2) і (5) у формулу (1), визначимо шуканий розподіл нормальних напружень σ_ω у нетто-перетині в будь-який момент розвитку тріщини. Оскільки епюра σ_ω є лінійною, то розкладемо нормальні секторіальні напруження на складові, які відповідають розтягу та чистому згину $\sigma_\omega = \sigma_{роз} + \sigma_{зг}$ (рис. 3).

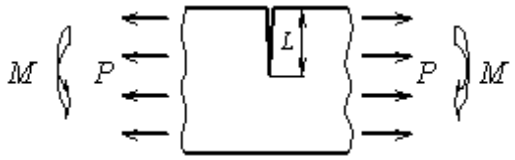

Рис. 3. Схема навантаження полиці та стінки швелера за стисненого кручення

Визначимо напруження у вершині горизонтальної вітки кутової тріщини (т.1):

$$0 < x_1 < (b - L_1); \qquad y_1 = -H; \qquad \omega_{0(1)} = -H\,(b - L_1). \quad (6)$$

Номінальні напруження у вершині вертикальної вітки кутової тріщини (т.2):

$$x_2 = 0; \qquad -H < y_2 < -(H - L_2); \qquad \omega_{0(2)} = 0. \quad (7)$$

Очевидно, що номінальні напруження від розтягу $\sigma_{роз}$ і чистого згину $\sigma_{зг}$ в граничних точках визначаються через отримані значення співвідношеннями:

$$\sigma_{роз}^{т.1} = \frac{\sigma_\omega^{т.1} + \sigma_\omega^{т.0}}{2}; \quad \sigma_{зг}^{т.1} = \frac{\sigma_\omega^{т.1} - \sigma_\omega^{т.0}}{2}; \quad (8)$$

$$\sigma_{роз}^{т.2} = \frac{\sigma_\omega^{т.2} + \sigma_\omega^{т.0}}{2}; \quad \sigma_{зг}^{т.2} = \frac{\sigma_\omega^{т.2} - \sigma_\omega^{т.0}}{2}, \quad (9)$$

де $\sigma^{т.0}_\omega$, $\sigma^{т.1}_\omega$, $\sigma^{т.2}_\omega$ – напруження, отримані з рівняння (1) за умов (6) та (7).

У загальному випадку КІН для смуги при розтягу та згині відповідно можуть визначатися залежностями [3]:

$$K_I^{роз} = p\sqrt{\pi \cdot L} \cdot [1{,}12 - 0{,}231\varepsilon + 10{,}55\varepsilon^2 - 21{,}72\varepsilon^3 + 30{,}39\varepsilon^4] = \sigma_{роз} \cdot \sqrt{\pi \cdot L} \cdot F; \quad (10)$$

$$K_I^{зг} = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot L} \cdot [1{,}122 - 1{,}4\varepsilon + 7{,}33\varepsilon^2 - 13{,}08\varepsilon^3 + 14\varepsilon^4] = \sigma_{зг} \cdot \sqrt{\pi \cdot L} \cdot F. \quad (11)$$

Для складного перетину залежності КІН можна записати [4]:

$$K_I^{роз} = \sigma_{ном}^{роз} \cdot (1 - \varepsilon_i) \cdot \sqrt{\pi \cdot L_i} \cdot F_i(\varepsilon_i); \quad (12)$$

$$K_I^{зг} = \sigma_{ном}^{зг} \cdot (1 - \varepsilon_j)^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot L_j} \cdot F_j(\varepsilon_j), \quad (13)$$

де $\sigma_{ном}$ – номінальні напруження в складному нетто-перетині, МПа;

$F_{i,j}(\varepsilon_{i,j})$ – поправкова функція, що враховує геометрію складного нетто-перетину;

$\varepsilon_{i,j}$ – параметр, що представляє відношення площі тріщини до площі поперечного перетину бездефектного профілю,

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{L_1 \cdot \delta_1 + L_2 \cdot \delta_2}{H \cdot \delta_2 + 2b \cdot \delta_1}. \tag{14}$$

Враховуючи лінійний розподіл секторіальних напружень у тонкостінному профілі за дії стисненого кручення, залежність КІН у вершині тріщини, яка розвивається у перетині елемента, матиме вигляд

$$K^{\omega}{}_1 = K^{роз}{}_1 + K^{зг}{}_1. \tag{15}$$

Для тріщини складної конфігурації взаємозв'язок положення вершин її віток у разі росту тріщини зумовлений величинами КІН, які у свою чергу визначаються розподілом напружень уздовж напрямку поширення тріщини. Очевидно, що за циклічного навантаження вершини тріщини будуть просуватися з різними швидкостями. Можна припустити, що у вершинах віток тріщини за її розвитку створюватиметься такий рівноважний напружений стан, коли $K^{\omega}{}_{I(m.1)} \leftrightarrow K^{\omega}{}_{I(m.2)}$ [5].

Дослідивши залежності (12) та (13) та виходячи з умови $K^{\omega}{}_{I(m.1)} = K^{\omega}{}_{I(m.2)}$, отримали співвідношення довжин віток тріщини, що розвиваються відповідно у полиці ($\delta_2 < L_1 < b$) та стінці ($\delta_1 < L_2 < H$) швелера (рис. 4).

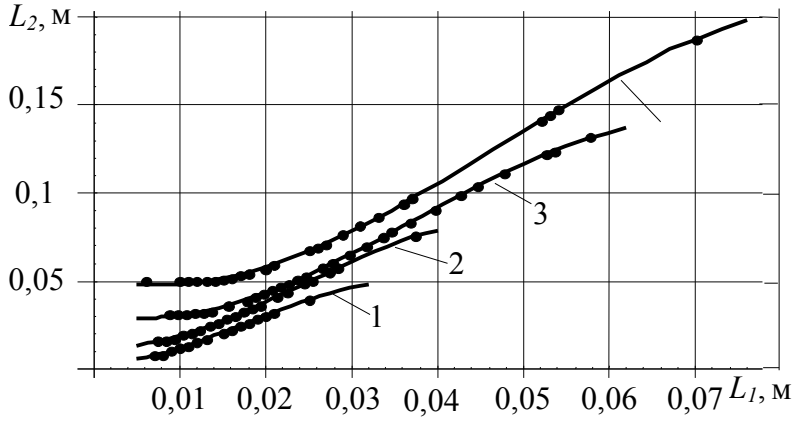

Рис. 4. Залежність між довжинами віток тріщини для ряду стандартних швелерів:

1 – співвідношення висоти та ширини швелерного профіля рівне 1,5; 2 – те саме рівне 2,0; 3 – те саме рівне 2,3; 4 – те саме рівне 2,6

Апроксимуючи масив даних (рис. 4), що характеризують співвідношення довжин тріщин, та підставивши отримані залежності у формули (12)–(15), отримаємо рівняння для визначення КІН у вершинах віток тріщини, які розвиваються у полиці (індекс 1) та стінці (індекс 2) швелерного профілю за дії стисненого кручення,

$$\begin{aligned} K_{I1}^{\omega} &= \sigma_{\omega} \cdot \sqrt{\pi \cdot L_1} \cdot F_1(\varepsilon_1); \\ K_{I2}^{\omega} &= \sigma_{\omega} \cdot \sqrt{\pi \cdot L_2} \cdot F_2(\varepsilon_2), \end{aligned} \tag{16}$$

де σ_{ω} – секторіальні напруження у бездефектному швелерному профілі, МПа;

ε_1, ε_2 – відношення площі відповідної вітки тріщини до площі поперечного перетину бездефектного профілю (зі залежності (14)):

$$\varepsilon_1 = \frac{L_1 \cdot \delta_1}{H \cdot \delta_2 + 2b \cdot \delta_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{L_2 \cdot \delta_2}{H \cdot \delta_2 + 2b \cdot \delta_1};$$

$F_1(\varepsilon_1)$ – поправкова функція, що враховує зміну геометрії нетто-перетину швелера;

– для швелерних профілів із співвідношенням висоти та ширини, рівним:

1,5 – $F_1(\varepsilon_1) = 14{,}872\varepsilon_1 + 93{,}792\varepsilon^2_1 - 5517{,}561\varepsilon^3_1 + 58091{,}313\varepsilon^4_1 - 245774{,}911\varepsilon^5_1 + 389062{,}973\varepsilon^6_1$;

$F_2(\varepsilon_2) = 9{,}190\varepsilon_2 + 341{,}132\varepsilon^2_2 - 9560{,}129\varepsilon^3_2 + 89159{,}433\varepsilon^4_2 - 356507{,}833\varepsilon^5_2 + 533111{,}705\varepsilon^6_2$;

2 – $F_1(\varepsilon_1) = 14{,}557\varepsilon_1 + 221{,}248\varepsilon^2_1 - 10489{,}507\varepsilon^3_1 + 121373{,}529\varepsilon^4_1 - 568569{,}009\varepsilon^5_1 + 969489{,}271\varepsilon^6_1$;

$F_2(\varepsilon_2) = 5{,}491\varepsilon_2 + 181{,}149\varepsilon^2_2 - 4247{,}017\varepsilon^3_2 + 34048{,}857\varepsilon^4_2 - 117909{,}719\varepsilon^5_2 + 153760{,}859\varepsilon^6_2$;

2,3 – $F_1(\varepsilon_1) = 31{,}330\varepsilon_1 - 230{,}640\varepsilon^2_1 - 5493{,}241\varepsilon^3_1 + 94042{,}022\varepsilon^4_1 - 498529{,}207\varepsilon^5_1 + 919107{,}546\varepsilon^6_1$;

$F_2(\varepsilon_2) = 8{,}021\varepsilon_2 + 70{,}204\varepsilon^2_2 - 2484{,}820\varepsilon^3_2 + 21023{,}256\varepsilon^4_2 - 73369{,}487\varepsilon^5_2 + 95951{,}442\varepsilon^6_2$;

2,6 – $F_1(\varepsilon_1) = 38{,}732\varepsilon_1 - 750{,}187\varepsilon^2_1 + 5113{,}211\varepsilon^3_1 + 4073{,}697\varepsilon^4_1 - 169614{,}807\varepsilon^5_1 + 508729{,}208\varepsilon^6_1$;

$F_2(\varepsilon_2) = 1{,}647\varepsilon_2 + 289{,}759\varepsilon^2_2 - 4686{,}511\varepsilon^3_2 + 29445{,}702\varepsilon^4_2 - 83061{,}897\varepsilon^5_2 + 88880{,}268\varepsilon^6_2$.

Висновок

Отримані залежності (16) дозволяють оцінити напружений стан у вершинах віток складної за конфігурацією тріщини в поперечному перетині швелерного профілю.

Для швелерних профілів, коли довжина вітки тріщини в полиці приблизно сягає її ширини ($L_1 \approx b$), довжина вітки тріщини в стінці буде рівна висоті профіля ($L_2 \approx H$). Це пояснюється тим, що центр згину кутникового, таврового чи хрестового перетину, і взагалі будь-яких профілів, що складаються з пучка пластин, знаходиться в точці перетину осей окремих елементів [2].

Для двотаврових (чи схожих (рис. 1, в)) профілів такий взаємозв'язок розвитку віток кутової тріщини реалізовуватися не буде, тому необхідні додаткові дослідження кінетики тріщини у двотаврових профілях за дії стисненого кручення.

Бібліографія

1. Критеріальна оцінка динамічної міцності конструкцій мобільних сільськогосподарських машин з врахуванням ефекту їх депланації / *Т. Рибак*, *О. Дарчук*, *М. Підгурський* та ін. // Вісник Тернопільського приладобудівного інституту, 1996. – Т.2. – С. 59–65.

2. *Бычков Д.В.* Строительная механика стержневых тонкостенных

конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 472 с.

3. Механика разрушения и прочность материалов / Под ред. *В.В. Панасюка*. – Т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

4. *Підгурський М.*, *Сташків М.* Методи визначення КІН для дефектних елементів відкритого профілю // Вісник ТДТУ, 2006. – Т. 11, № 2. – С. 92–108.

5. *Підгурський М.*, *Сташків М.* Розвиток наскрізних тріщин в гнутозварних тонкостінних елементах коробчастого профілю // Вісник ТДТУ, 2006. – Т. 11, № 4. – С. 78–86.